

黒体輻射とプランクの輻射公式

伊東 由文
徳島大学総合科学部

投射されたすべての波長の輻射線を完全に吸収すると考えられた理想的物体を黒体という。これは、1859年にキルヒホッフによって導入された黒体の概念である。

黒体から放射される熱放射を黒体輻射という。

黒体輻射に関して、プランクの輻射公式が現象の実験観測結果と完全に一致していることが知られている。この意味で、プランクの輻射法則は黒体輻射の正しい輻射法則であることが分かる。この輻射法則の発見は、プランクの作用量子といわれるプランクの定数 h の発見によって行われた。

本講演において、このプランクの輻射法則の真の意味を理解したい。すなわち、プランクの輻射公式は調和振動子のシュレーディンガー方程式の固有値の平均をとって導かれる。それではなぜ黒体は調和振動子の系と考えるべきだろうか。このことを以下に明らかにしたい。

考える黒体は温度 T において熱平衡状態にあると考える。

このとき、黒体を構成する微粒子は熱運動していると考えられる。この微粒子の運動は何らかの力の作用すなわちポテンシャルの作用によって運動していると考えられる。このとき、ポテンシャルの安定な平衡点の近くでは微粒子は調和振動子として運動していると考えてよい。微粒子の大きさに比べ周りの空間は十分大きいので、数学的近似において、調和振動子は全空間において調和振動していると考えられる。実際、各微粒子は質点と考えられている。

このような数理モデルを用いて、調和振動子の集団のエネルギー期待値を新量子論の公理に基づいて計算して、プランクの輻射公式を導く。

実際、プランクの輻射公式がどうして正しいのか、その真の意味は新量子論を用いて研究して初めて完全な理解に到達することができたのである。

許容する L^2 密度の中からエネルギー期待値が停留値をとるように L^2 密度を選び出すと、これが定常状態で実際に実現される量子状態を決定する。

この L^2 密度はシュレーディンガー方程式に対する固有値問題の解として与えられる。この固有関数 $\psi_n(x)$ を用いて全量子系の量子状態を決める L^2 密度 $\psi(x)$ を固有関数展開によって求める。

すなわち、複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ がただ一つ存在して

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

と展開する。

この L^2 密度を用いて全量子系のエネルギー期待値を計算すると、これがプランクの輻射公式になっている。

すなわち、質量 m で、角振動数 ω の調和振動子 ρ の古典力学的エネルギー

$$\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x(\rho)^2$$

を、考えている量子系の構成する確率空間 Ω 上の確率変数と考えて期待値を計算すると、

$$E\left[\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x(\rho)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

が従う。

これは、1次元調和振動子からなる全量子系のエネルギー期待値であり、プランクの輻射公式と一致する。これがプランクの輻射公式の新しい意味である。

黒体輻射の定常状態においては、1次元調和振動子からなる量子系は固有量子系の混合状態として実現されている。この混合の割合が数列 $\{|c_n|^2\}_{n=0}^{\infty}$ によって定まっている。このことは、純理論的には導けなくて、実験データと合わせるために経験上の知識を用いている。

すなわち、

$$|c_n|^2 = (1 - \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])(\exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])^n, \\ (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と定めている。ここで、 T は絶対温度を表し、 k_B はボルツマン定数を表す。

その結果、第 n 固有値 $\mathcal{E}_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ は第 n 固有関数によって決定される量子確率分布に従う第 n 固有量子系のエネルギー期待値であることが示される。さらに、各調和振動子のエネルギーは必ずしも離散的ではなく、実現される固有量子系のエネルギー期待値が離散的な値をとり、その最小値が正の値をとることが分かった。すなわち、最小の固有値 $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ は固有量子系のエネルギー期待値の最小値である。したがって、エネルギー量子と呼ばれていたプランクの定数 h は、固有量子系のエネルギー期待値の最小単位ということになる。これによって、プランクのエネルギー量子の新しい意味が分かった。

参考文献

- [1] 伊東由文・萱間顕誠・鴨下豊, 新量子論とプランクの輻射公式の新しい意味, 徳島大学総合科学部, 自然科学研究 第16巻, pp.1-10, 2003.
- [2] 伊東由文, 新量子論. 現状と課題, 徳島大学総合科学部, 自然科学研究 第18巻, pp.1-14, 2004.
- [3] 伊東由文, 新量子論. 現状と課題, 実解析学シンポジウム 2004 大阪, pp.181-199, 2004.
- [4] 伊東由文, 新量子論 (執筆中), 第5章 黒体輻射とプランクの輻射公式 (プレプリント).