

2025年度 編入学試験 数学【理工学部】

受 験 番 号								氏 名	志望学科
									学科

I 以下の各問に答えよ。(23 点)

問 1. 放物線 $y = 2x^2 + 8x + 3$ について、次の座標を求めよ。

(1) 頂点の座標

(2) x 軸との交点の座標

問 2. θ が $\pi < \theta < 2\pi$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ を満たすとき、次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin \theta$

(2) $\cos 2\theta$

問 3. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$

(2) $f(x) = (3x + 1)e^x$

(3) $f(x) = \sin^3 x$

問 4. 曲線 $y = \sqrt{x-2}$ 上の x 座標が 3 である点における接線の方程式を求めよ。

問 1. (解答例)

(1) 平方完成すると $y = 2x^2 + 8x + 3 = 2(x^2 + 4x) + 3 = 2\{(x+2)^2 - 4\} + 3 = 2(x+2)^2 - 5$ となるから、頂点の座標は $(-2, -5)$ である。

(2) $2x^2 + 8x + 3 = 0$ を解くと $x = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}$ であるから、 x 軸との交点の座標は $\left(\frac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}, 0\right)$ である。

問 2. (解答例)

(1) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ であるから、 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ となる。 $(\pi < \theta < 2\pi$ であるから $\sin \theta < 0)$

(2) 加法定理より

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{3}{16} - \frac{13}{16} = -\frac{5}{8}$$

問 3. (解答例)

(1) $f'(x) = 9x^2 - 4x$

(2) $f'(x) = (3x+1)'e^x + (3x+1)(e^x)' = (3x+4)e^x$

(3) $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$

問 4. (解答例) $f(x) = \sqrt{x-2}$ とすると $f(3) = 1$ である。また $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}$ なので $f'(3) = \frac{1}{2}$ である。したがって、接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x-3) + 1 \quad \text{から} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Ⅱ 以下の各問に答えよ。(13 点)

問 1. 次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - 3) dx \quad (2) \int_0^2 (2x - 1)e^x dx \quad (3) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

問 2. 重積分 $\iint_D x^2 y \, dx dy$ を計算せよ。ただし、 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ とする。

問 1. (解答例)

$$\begin{aligned} (1) \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - 3) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-1}^2 = -3 \\ (2) \int_0^2 (2x - 1)e^x dx &= \left[(2x - 1)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 2e^x dx = 3e^2 + 1 - \left[2e^x \right]_0^2 = 3e^2 + 1 - (2e^2 - 2) = e^2 + 3 \\ (3) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \left[2\sqrt{x} \right]_c^4 = \lim_{c \rightarrow +0} (4 - 2\sqrt{c}) = 4. \end{aligned}$$

問 2. (解答例)

$$\iint_D x^2 y \, dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^x x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^4 dx = \left[\frac{1}{10} x^5 \right]_0^2 = \frac{16}{5}$$

III 2 変数関数 $f(x, y) = 4x^3 + 4xy + y^2 + 2y - 4$ について、以下の問に答えよ。(14 点)

問 1. 以下の偏導関数を求めよ。

$$(1) f_x(x, y) \quad (2) f_y(x, y) \quad (3) f_{xx}(x, y) \quad (4) f_{yy}(x, y) \quad (5) f_{xy}(x, y)$$

問 2. $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ であるとき、実数の組 (x, y) を全て求めよ。

問 3. $f(x, y)$ の極値を求めよ。

問 1. (解答例) それぞれの偏導関数を求める。

$$(1) f_x(x, y) = 12x^2 + 4y \quad (2) f_y(x, y) = 4x + 2y + 2$$

$$(3) f_{xx}(x, y) = 24x \quad (4) f_{yy}(x, y) = 2 \quad (5) f_{xy}(x, y) = 4$$

問 2. (解答例) $12x^2 + 4y = 0$ より $y = -3x^2$ である。これを $f_y(x, y) = 4x + 2y + 2 = 0$ に代入すると $3x^2 - 2x - 1 = 0$ となる。これを解くと $x = 1, -\frac{1}{3}$ となる。よって求める実数の組み合わせは

$$(x, y) = (1, -3), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

問 3. (解答例) 極値を取る必要条件是 $f_x = f_y = 0$ である。問 2. で求めた (x, y) を ヘッセ行列式

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24x & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 48x - 16$$

に代入して極値の判定を行う。

- $(x, y) = (1, -3)$ のとき $H(1, -3) = 32 > 0$ より極値をとる。

このとき $f_{xx}(1, -3) = 24 > 0$ だから、極小値 $f(1, -3) = -9$ をとる。

- $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ のとき $H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -32 < 0$ であるから極値をとらない。

IV 以下の各問に答えよ。(18 点)

問 1. ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対して以下を求めよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積

問 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して以下の行列を求めよ。

(1) AB (2) $(A + 2B)(A - 2B)$

問 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

問 1. (解答例)

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 \quad (2) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問 2. (解答例)

$$(1) AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) (A + 2B)(A - 2B) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -28 & -4 \\ 22 & 5 & -16 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

問 3. (解答例) 以下の行列の基本変形により, 行列 A の階数は 3 であることが求まる。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 3 \text{ 行目}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \times 1 + 2 \text{ 行目} \\ 1 \text{ 行目} \times 2 + 3 \text{ 行目}}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2 \text{ 行目} \times (-3) + 1 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 行目} \times (-3) + 3 \text{ 行目}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \times (-1) \\ 3 \text{ 行目} \times (-1/4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ 行目} \times 1 + 1 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \times 1 + 2 \text{ 行目}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

V 以下の行列式の値を求めよ。(15 点)

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(解答例)

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times 2 = -2$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-3) + 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 0 \times (-1) - 1 \times (-1) \times 1 - (-1) \times 2 \times (-3) - 1 \times 2 \times 0 \\ = 3 + 4 + 0 + 1 - 6 - 0 = 2$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-39) - 2 \times 18 - 4 \times (-28) \\ = -39 - 36 + 112 = 37$$

VI 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ に対して次の間に答えよ。(17 点)

問 1. 行列 A の固有値をすべて求めよ。

問 2. 問 1 で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。

問 3. 問 2 で求めた固有ベクトルを用いて行列 A を対角化せよ。

問 1. (解答例) 固有多項式は

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 5) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

であるから、行列 A の固有値は $\lambda = 1, 3$ である。

問 2. (解答例) 求める固有ベクトル $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は以下の連立方程式の解である。

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = 1$ の場合 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。したがって $-4x + 2y = 0$ である。 t_1 を任意定数として $x = t_1$ とおくと $y = 2t_1$ であり、固有ベクトルは

$$v = \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t_1 \text{ はゼロでない任意定数})$$

• $\lambda = 3$ の場合 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。したがって $x - y = 0$ である。 t_2 を任意定数として $x = t_2$ とおくと $y = t_2$ であり、固有ベクトルは

$$v = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \text{ はゼロでない任意定数})$$

問 3. (解答例) 行列 $P = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2t_1 & t_2 \end{pmatrix}$ とすると 逆行列 $P^{-1} = \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} -t_2 & t_2 \\ 2t_1 & -t_1 \end{pmatrix}$ である。

行列 A を対角化すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} -t_2 & t_2 \\ 2t_1 & -t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} -t_2 & t_2 \\ 6t_1 & -3t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2t_1 & t_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} t_1 t_2 & 0 \\ 0 & 3t_1 t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

別解として 行列 $P = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 \\ t_2 & 2t_1 \end{pmatrix}$ として対角化してもよい。この場合、対角行列は $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になる。