２０２６年度　編入学試験
数学
【理工学部】

志望学部・学科										
学部　学科										
受　験　番　号										氏　名

$\boxed{\text{I}}$ 以下の各問に答えよ。(20 点)

問 1. 以下の式の値を求めよ。ただし, 逆三角関数の値域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\sin^{-1} \dfrac{1}{2} + \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\tan\left(\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

問 2. 2 つの複素数 $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 1 + i$ について, 以下の式の値を求めよ。ただし, 虚数単位 i は $i^2 = -1$ を満たす。

(1) $|z_1 z_2|$　(2) $\arg \dfrac{z_1}{z_2}$

問 3. 座標平面上で, 曲線 $y^2 = -8x$ の点 $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$ における接線の方程式を求めよ。

問 1.（解答例） (1) $\sin^{-1} \dfrac{1}{2} + \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$（4 点）

(2) $\tan\left(\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan\left(\sin^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tan \dfrac{\pi}{4} = 1$（4 点）

問 2.（解答例） $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ より,

(1) $|z_1 z_2| = \left|4e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 4\sqrt{2}$（4 点）

(2) $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg \dfrac{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \arg(2\sqrt{2}e^{i\frac{7}{12}\pi}) = \dfrac{7}{12}\pi + 2n\pi$ (n は整数)（4 点）

問 3.（解答例） $y \neq 0$ のとき $2yy' = -8 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{4}{y}$ より, 点 $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$ における接線の傾きは -2 である。よって, 接線の方程式は, $y = -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 1$ である。（4 点）

$\boxed{\text{II}}$ 実数 x, y についての 2 変数関数 $f(x,y) = e^{x^2+3xy}$ について以下の各問に答えよ。(16 点)

問 1. 次の偏導関数を求めよ。

(1) $f_x(x,y)$　　(2) $f_y(x,y)$　　(3) $f_{xy}(x,y)$

問 2. $f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。ただし, 剰余項は求めなくてもよい。

(解答例)

問 1.

(1) $f_x(x,y) = e^{x^2+3xy} \times \dfrac{\partial(x^2+3xy)}{\partial x} = (2x+3y)e^{x^2+3xy}$（4 点）

(2) $f_y(x,y) = e^{x^2+3xy} \times \dfrac{\partial(x^2+3xy)}{\partial y} = 3xe^{x^2+3xy}$（4 点）

(3) $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial(2x+3y)}{\partial y}e^{x^2+3xy} + (2x+3y)f_y = \{3+3x(2x+3y)\}e^{x^2+3xy} = (6x^2+9xy+3)e^{x^2+3xy}$（4 点）

問 2.

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial(2x+3y)}{\partial x}e^{x^2+3xy} + (2x+3y)f_x = \{2+(2x+3y)^2\}e^{x^2+3xy}$

$f_{yy}(x,y) = 3xf_y = 9x^2e^{x^2+3xy}$

以上より, マクローリン展開は

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) + \cdots \\
&= 1 + x^2 + 3xy + \cdots \quad (4\text{ 点})
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{III}}$ 以下の各問に答えよ。(14 点)

問 1. 累次積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 (x+\sin^2 y\cos y)dx\right)dy$ の値を求めよ。

問 2. 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$ の値を求めよ。ただし, $D=\{(x,y)|0\leqq x\leqq 1\ ,\ 0\leqq y\leqq 2x\}$ とする。

(解答例)

問 1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 (x+\sin^2 y\cos y)dx\right)dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x^2}{2}+x\sin^2 y\cos y\right]_0^2 dy$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\sin^2 y\cos y\right)dy$$

$$=\left[2y+\frac{2}{3}\sin^3 y\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi+\frac{4}{3}\quad (7\text{ 点})$$

問 2. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{2x}\frac{xy}{x^2+y^2+1}dy\right)dx$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x\log(x^2+y^2+1)\right]_0^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\log(5x^2+1)-\log(x^2+1)\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 (\log(5t+1)-\log(t+1))\,dt\quad (x^2=t \text{ とおくと } 2xdx=dt)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(5t+1)\log(5t+1)-(t+1)\log(t+1)\right]_0^1=\frac{3}{10}\log 6-\frac{1}{2}\log 2\quad (7\text{ 点})$$

$\boxed{\text{IV}}$ 3×3 行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ に対して，$C=A+B+\dfrac{1}{2}(AB-BA)$ とする。このとき以下の行列を計算せよ。ただし，正方行列 X に対して行列の指数関数を $e^X=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{X^k}{k!}=E+X+\frac{1}{2!}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\cdots$ と定義し，E は単位行列を表す。(各 4 計 20 点)

(1) A^3　(2) B^3　(3) C^3　(4) e^Ae^B　(5) e^C

(解答例)

$$(1)A^2=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}=O\Rightarrow A^3=O\quad(2)B^2=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}=O\Rightarrow B^3=O$$

$$(3)AB=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad BA=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}=O$$

$$C=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}+\frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=AB-BA}=\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$C^2=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C^3=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C^2}=O$$

(4) (1)(2) より $k=2,3,4,\cdots$ で $A^k=B^k=O$ である。従って次式を得る。

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{A^k}_{=O(k\geqq2)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=E}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$e^B=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{B^k}_{=O(k\geqq2)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=E}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$e^Ae^B=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=e^A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=e^B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(5) (3) より $k=3,4,5,\cdots$ で $C^k=O$ である。従って次式を得る。

$$e^C=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{C^k}_{=O(k\geqq3)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=E}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C}+\frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C^2}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{V}}$ 座標空間内に点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，点 $\mathrm{A}(1,0,-1)$，点 $\mathrm{B}(2,1,-3)$，点 $\mathrm{C}(-1,2,-2)$ がある。このとき以下の各問に答えよ。(12 点)

問 1. (6 点) 外積ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を求めよ。

問 2. (6 点) 直線 OA と直線 BC の距離 d を求めよ。必要ならば $\vec{\ell}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき $d=\dfrac{|\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\vec{\ell}|}$ であることを用いてもよい。

問 1.（解答例） $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-3,1,1)$ より次式を得る。

$$\vec{\ell}=(0\times1-(-1)\times1\ ,\ (-1)\times(-3)-1\times1\ ,\ 1\times1-0\times(-3))=(1,2,1)$$

問 2.（解答例） $|\vec{\ell}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$，$\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\times2+2\times1+1\times(-3)=1$ より $d=\dfrac{|\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{|\vec{\ell}|}=\dfrac{|1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ である。

(別解 1) 直線 OA の方向ベクトルは $\vec{\ell}_1=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,0,-1)$，直線 BC の方向ベクトルは $\vec{\ell}_2=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-3,1,1)$ である。直線 OA 上の点を $\mathrm{P}(p,0,-p)$，直線 BC 上の点を $\mathrm{Q}(2-3q,1+q,-3+q)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2-p-3q,1+q,-3+p+q)$ である。p,q が実数全体の範囲を動くとき PQ が最小値を取るのは直線 PQ が直線 OA に垂直，かつ直線 PQ が直線 BC に垂直のときである。このとき次式を得る。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{\ell}_1=-2p-4q+5=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{\ell}_2=4p+11q-8=0$$

これより $p=\dfrac{23}{6},q=\dfrac{-2}{3}$ を得る。このとき次式を得る。

$$d=\mathrm{PQ}=\sqrt{(2-p-3q)^2+(1+q)^2+(-3+p+q)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(別解 2) 直線 OA の方向ベクトルは $\vec{\ell}_1=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,0,-1)$，直線 BC の方向ベクトルは $\vec{\ell}_2=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-3,1,1)$ である。直線 OA 上の点を $\mathrm{P}(p,0,-p)$，直線 BC 上の点を $\mathrm{Q}(2-3q,1+q,-3+q)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2-p-3q,1+q,-3+p+q)$ である。PQ^2 は次式のように平方完成出来る。

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(2-p-3q)^2+(1+q)^2+(-3+p+q)^2\\&=(p^2+9q^2+4-4p-12q+6pq)+(q^2+2q+1)+(p^2+q^2+9-6p-6q+2pq)\\&=2p^2+11q^2+8pq-10p-16q+14=2\left(p-\frac{5-4q}{2}\right)^2+11q^2-16q+14-\left(8q^2-20q+\frac{25}{2}\right)\\&=2\left(p-\frac{5-4q}{2}\right)^2+3q^2+4q+\frac{3}{2}=2\left(p-\frac{5-4q}{2}\right)^2+3\left(q+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

p,q が実数全体を動くとき，$q=\dfrac{-2}{3},p=\dfrac{5}{2}-2q=\dfrac{23}{6}$ のとき PQ^2 は最小値 $\dfrac{1}{6}$ を取る。従って $d=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ とするとき以下の各問に答えよ。(18 点)

問 1. (固有値 6 点、固有ベクトル 6 点、計 12 点) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問 2. (6 点) $A^3 - 20A^2 + 26A$ の固有値を求めよ (固有ベクトルは不要)。

問 1. (解答例) まず固有多項式 $\phi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ は次式で計算出来る。

$$\phi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 8 & 10 \\ -5 & \lambda + 7 \end{pmatrix} = (\lambda^2 - \lambda - 56) - (-50) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

方程式 $\phi_A(\lambda) = 0$ を解いて固有値は $\lambda = -2, 3$ である。次にそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求める。

• $\lambda = -2$ に対応する固有ベクトル $\vec{x}$ は，$A\vec{x} = -2\vec{x}$,
即ち $(A + 2E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10(x_1 - x_2) \\ 5(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす。従って $x_1 - x_2 = 0$ よりこの固有ベクトルは $\vec{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である (s は 0 以外の数)。

• $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル $\vec{y}$ は，$A\vec{y} = 3\vec{y}$,
即ち $(A - 3E)\vec{y} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(y_1 - 2y_2) \\ 5(y_1 - 2y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす。従って $y_1 - 2y_2 = 0$ よりこの固有ベクトルは $\vec{y} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である (t は 0 以外の数)。

問 2. (解答例) $f(x) = x^3 - 20x^2 + 26x$ とする。$f(A) = A^3 - 20A^2 + 26A$ の固有値はフロベニウスの定理より
$f(-2) = -8 - 20 \times 4 + 26 \times (-2) = -140$ と，$f(3) = 27 - 20 \times 9 + 26 \times 3 = -75$ である。