摂南大学大学院理工学研究科博士前期課程
（生産開発工学専攻）
２０２３年度一般入学試験（第３回）試験問題

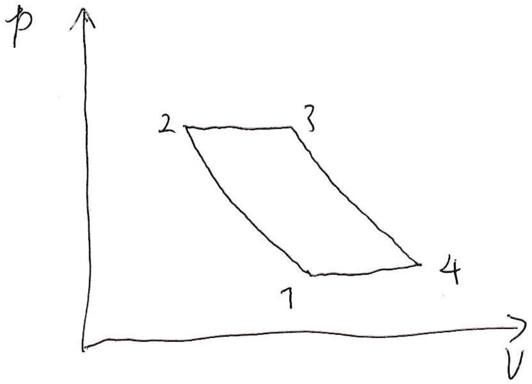
＜機械工学系＞ 機械工学－２	問題番号	4	受験番号	

ガスタービンに代表される熱サイクルであるブレイトンサイクルは、圧縮機動作によりサイクル内の気体は初期状態の圧力 p_1 から p_2 まで加圧される。このとき、初期状態と加圧後の圧力の比 p_2/p_1 を圧力比 γ と呼ぶ。

ブレイトンサイクルは、断熱圧縮（状態1→状態2）、等圧加熱（状態2→状態3）、断熱膨張（状態3→状態4）、等圧冷却（状態4→状態1）を経過し、等圧加熱過程の入熱量 Q_{23} と等圧冷却過程の除熱量 Q_{41} の差が、一連のサイクル動作で取り出すことができる正味の仕事 W となる。そして、サイクルへの入熱量 Q_{23} に対するサイクルの正味の仕事 W の割合が、サイクルの熱効率 η である。

（１）

ブレイトンサイクルのp-v線図を示せ。



（2）

ブレイトンサイクルの理論熱効率 η を圧力比 γ で表す式を導出せよ。
なお、理論熱効率を導出するにあたり、
等圧過程によって状態Aから状態Bに変化するときの気体への入熱量 Q_{AB} は、
気体の質量 m、等圧比熱 c_p、温度 T をつかって

$Q_{AB} = mc_p(T_B - T_A)$

とあらわすことができること
断熱過程によって状態Cから状態Dに変化するときの気体の温度 T の変化は、
気体の圧力p、比熱比κをつかって

$T_C / T_D = (p_C / p_D)^{(\kappa-1)/\kappa}$

とあらわすことができることに参考にせよ。

$$\eta = \frac{Q_{23} - Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$= 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$Q_{41} = mc_p(T_4 - T_1)$$

$$Q_{23} = mc_p(T_3 - T_2)$$

$$= 1 - \frac{mC_p(T_4 - T_1)}{mC_p(T_3 - T_2)}$$

$$= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{\kappa-1/\kappa} = \gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$T_2 = T_1\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$T_3/T_4 = (p_3/p_4)^{\kappa-1/\kappa} = \gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$T_3 = T_4\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$= 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{T_4\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - T_1\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

$$= 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_4 - T_1)\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad //$$

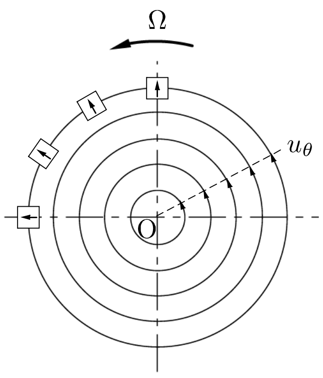
摂南大学大学院理工学研究科博士前期課程
（生産開発工学専攻）
２０２３年度一般入学試験（第２回）試験問題

＜機械工学系＞ 機械工学－２	問題番号	4	受験番号	

【問】次の文章は強制渦について概説したものである．(a)から(e)の括弧に入る適切な式もしくは記号を記せ．

右図のように，円周方向の速度u_θが半径rに比例するとき，これを強制渦という．比例定数をΩとすれば速度場u_θは

$$u_\theta = \Omega r \qquad (1\text{-}1)$$



と書けるので，

$$\frac{du_\theta}{dr} = [\quad (a) \quad] = 一定 \qquad (1\text{-}2)$$

である．強制渦の場合，流体は剛体と同じように一体となって中心0のまわりを回転しており，流体粒子もまた角速度Ωで回転する．

本問題の場合，半径方向の速度u_rはゼロであり，u_θは周方向θに依存しないので，極座標表示した定常流れにおける非圧縮・粘性流体のナビエ・ストークス方程式（注釈参照）より，

$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = [\quad (b) \quad]$　※ここでは，u_θは展開せずそのまま残しておくこと　(1-3)

となる．ベルヌーイの式は同じ流線上で成立するので，全圧をp_0とすれば，ベルヌーイの式はある同心円の流線上で

$[\quad (c) \quad] + p = p_0$　※u_θは展開せずそのまま残しておくこと　(1-4)

である．一般に，全圧p_0は異なった流線上では異なる値をとることから，式(1-4)をrで微分して得られる式に式(1-3)を代入すれば次式を得る．

$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}r} = [\quad (d) \quad]$　※u_θは展開せずそのまま残しておくこと　(1-5)

式(1-1)の速度分布を式(1-5)に代入したものをrで積分し，境界条件（$r = 0$で$p_0 = 0$）を用いれば全圧p_0が求まる．この全圧p_0を式 (1-4)に代入し式(1-1)の速度分布を用いれば，強制渦の圧力分布

$$p = [\quad (e) \quad] \qquad (1\text{-}6)$$

が求められる．強制渦の一例として，水で満たしたグラスを回転させたときに生じる渦が挙げられる．なお，式(1-6)を$p = \rho g z$に代入すれば，強制渦によって上昇する水面の高さzが得られる（ただし，gは重力加速度である）．

（注）極座標表示による定常な非圧縮・粘性流体のナビエ・ストークス方程式の半径方向成分：

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$$

ただし，ρは流体の密度，νは動粘性係数であり，$\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial\theta^2$である．

【解答欄】

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Ω	$\rho\frac{u_\theta^2}{r}$	$\frac{\rho}{2}u_\theta^2$	$\rho\left(u_\theta\frac{du_\theta}{dr} + \frac{u_\theta^2}{r}\right)$	$\frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2$

解答例

$\boxed{\mathrm{I}}$ [15 点]　対数微分の方法を用いる。

$$\log f(x) = \frac{1}{2}\log(e^x - 1) - \frac{1}{2}\log(e^x + 1), \quad x > 0$$

を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^x}{2(e^x-1)} - \frac{e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}$$

となり, 両辺に $f(x)$ を乗じて

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+1)}\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} = \boxed{\frac{e^x}{\sqrt{(e^x-1)(e^x+1)^3}}}$$

となる。 □

$\boxed{\mathrm{II}}$ [25 点]　$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の間の内積は $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 6$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 81$ である。

(1) (20 点) 直交分解 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$ の射影成分は

$$\mathbf{a}_\parallel = k\mathbf{b} \ (k \text{ は定数}), \quad \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b} = 0$$

を満たす。$\mathbf{a}_\perp\cdot\mathbf{b} = 0$ から, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = k\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ となり, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 81$ を代入することにより, $k = 1/27$ を得る。よって, $\mathbf{a}_\parallel = \mathbf{b}/27$, $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} - \mathbf{b}/27$ である。すなわち

$$\boxed{\mathbf{a}_\parallel = \frac{1}{27}\big(4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3\big), \quad \mathbf{a}_\perp = \frac{1}{27}\big(23\mathbf{e}_1 + 58\mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_3\big).}$$

(2) (5 点) $\angle\mathrm{AOB} = \theta \ (0 < \theta < \pi)$ とする。

$$\mathrm{OA} = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{6}, \quad \mathrm{OB} = |\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = 9, \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

となり, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は

$$|\triangle\mathrm{OAB}| = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta = \frac{1}{2}\times 9\sqrt{6}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{53}}{2}}$$

である。 □

$\boxed{\mathrm{III}}$ [25 点]

(1) (10 点) 掃き出し法で逆行列 A^{-1} を求める。E を単位行列とする。拡大行列 $\widetilde{A} = [A\,|\,E]$ に列基本変形を繰り返すと

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

となる。よって

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

(2) (15 点) A の特性多項式は

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

となり, 特性方程式 $\varphi_A(\lambda)=0$ の解は $\lambda=1,2,3$ である。A の固有値は $1,2,3$ となり, その各固有ベクトルを $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ とすると

$$\boxed{\vec{u} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (t_1, t_2, t_3 \neq 0)$$

となる。 □

IV [35 点]

(1) (10 点) 被積分関数を部分分数展開すると

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

となるので

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^2 = \boxed{2\log 2 - \log 3}$$

である。

(2) (10 点) $\big(-1/\tan x\big)' = 1/\sin^2 x$ に注意すると

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = \Big[-\frac{1}{\tan x}\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

(3) (15 点) $\log(1+x^2)$ の不定積分は, 部分積分によって

$$\begin{aligned} \int \log(1+x^2)dx &= x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\ &= x\log(1+x^2) - \int 2\Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)dx \\ &= x\log(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

となる。これから

$$\int_0^{\sqrt{3}} \log(1+x^2)dx = \Big[x\log(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x\Big]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}(\log 2 - 1).}$$

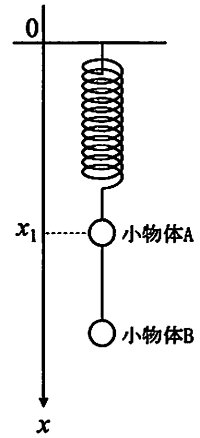
□

摂南大学大学院理工学研究科博士前期課程

（生産開発工学専攻）

２０２３年度一般入学試験（第３回）試験問題

（専門関連基礎） 力学	問題番号	7	受験番号	



図のように，自然長l[m]，バネ定数k[N/m]の軽いバネに質量m_1[kg]の小物体Aを吊るし，小物体Aの下に質量m_2[kg]の小物体Bを長さL[m]の軽い糸で吊り下げた。小物体Bを下方にa[m]だけ引き下げて静かに手を放したところ，糸がたるまない状態で小物体Aと小物体Bは振幅a[m]で単振動を行なった。これについて以下の問いに答えよ。なお，重力加速度は鉛直下向きにg[m/s^2]，糸の小物体への張力をT[N]とする。また，図のようにx軸を定義し，鉛直下向きを正とする。

(1) 図のように小物体Aに小物体Bを吊るし，静止させた。この時，つり合いの位置x_1[m]を求めよ。

$(m_1+m_2)g = k(x_1-l_0)$ より

$x_1 = l_0 + \frac{(m_1+m_2)g}{k}$

($x_1 = l_0 + \frac{(m_1+m_2)g}{k}$)

(2) 小物体Aと小物体Bを単振動させた時，任意の時刻t[s]における小物体Aの任意の位置をx[m]として，小物体Aと小物体Bの運動方程式を示せ。

小物体A：$m_1\frac{d^2x}{dt^2} = m_1g + T - k(x-l_0)$，小物体B：$m_2\frac{d^2(x+L)}{dt^2} = m_2g - T$

（または $m_2\frac{d^2x}{dt^2} = m_2g - T$ ）

(3) 単振動している小物体Aと小物体Bの角振動数ω[rad/s]を求めよ。

(2)より $(m_1+m_2)\frac{d^2x}{dt^2} = (m_1+m_2)g - k(x-l_0)$ → $(m_1+m_2)\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_1)$

ここで $\frac{d^2(x+L)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ を利用し

$(m_1+m_2)g = k(x_1-l_0)$ を代入する

よって $\omega^2 = \frac{k}{m_1+m_2}$

($\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$)

(4) 単振動している小物体Aの任意の時刻t[s]における位置$x(t)$を求めよ。なお，つり合いの位置x_1，角振動数ωを用いて良い。（初期条件：$t=0$の時$x = x_1+a$，$\frac{dx}{dt}=0$である）

(3)より $x = x_1 + A\sin(\omega t+\alpha)$ と表わせる。

$t=0$ のとき $a = A\sin\alpha$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0 = A\omega\cos(\alpha)$

$\cos\alpha = 0$ より $\alpha = \frac{\pi}{2}$，$A = a$

よって $x = x_1 + a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = x_1 + a\cos(\omega t)$

($x(t) = x_1 + a\cos(\omega t)$)

(5) 単振動している糸の張力$T(t)$を求めよ。なお，角振動数ωを用いて良い。

$T = m_2g - m_2\frac{d^2x}{dt^2}$ より

$T = m_2g + m_2a\omega^2\cos\omega t$

($T(t) = m_2(g + a\omega^2\cos(\omega t))$)

(6) 糸がたるまないで単振動する振幅aの条件を導出せよ。

（導出過程を記入）

最小のTにおいて$T > 0$とすればよい。

最小の$T = m_2(g - a\omega^2) > 0$ より

$a\omega^2 < g$

$a < \frac{g}{\omega^2} = \frac{g(m_1+m_2)}{k}$

摂南大学大学院理工学研究科博士前期課程

（生産開発工学専攻）

２０２３年度一般入学試験（第３回）試験問題

（専門関連基礎） 電気工学基礎	問題番号	9	受験番号	

［1］ 図1の回路（$R = 20\sqrt{3}$ [Ω]，$C = \frac{500}{3\pi}$ [μF]）の端子間に周波数50[Hz]の電圧$\dot{V} = 120\angle 0°$ [V]が加えられているとき，つぎの問いに答えよ．ただし，答えに平方根もしくは分数が含まれる場合は小数に直す必要はない．数式を書いて求めることが望ましい．単位も書くこと．

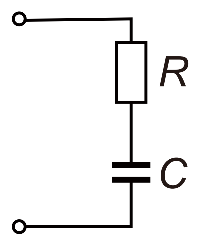


図1

(1) 端子間のインピーダンス$\dot{Z}$ [Ω]を求めよ．

$$\dot{Z} = R - j\frac{1}{\omega C} = 20\sqrt{3} - j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot \frac{500}{3\pi} \cdot 10^{-6}}$$

$$= 20\sqrt{3} - j60\ [\Omega]$$

$$= 40\sqrt{3}\angle -60°[\Omega]$$

(2) 流れる電流$\dot{I}$ [A]のフェーザ表示を求めよ．

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{120\angle 0°}{40\sqrt{3}\angle -60°} = \sqrt{3}\angle 60°\ [\mathrm{A}]$$

(3) 力率（$\cos\theta$），有効電力P [W]の値をそれぞれ求めよ．

$$\cos\theta = \frac{R}{|\dot{Z}|} = \frac{20\sqrt{3}}{40\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad P = IV\cos\theta = \sqrt{3} \times 120 \times 0.5 = 60\sqrt{3}\ [\mathrm{W}]$$

［2］ 電荷量 $Q_1 = -1$ [μC] と $Q_2 = 3$ [μC] の点電荷の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1 = (3, 2)$ および $\boldsymbol{r}_2 = (1, -1)$ とする．ここで座標の単位は [m]，$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ [m/F] である．円周率 π や√はそのまま使用してもよい．

(1) 点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_\mathrm{P} = (1, 2)$ であるとき，点電荷 Q_1 および点電荷 Q_2 が点 P に作る電界ベクトル $\boldsymbol{E}_1$ および $\boldsymbol{E}_2$ をそれぞれ求めよ．

$\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_1 = (1-3, 2-2) = (-2, 0)$，また，$|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$ [m] なので，

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_1|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_1|} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{-1 \times 10^{-6}}{2^2} \cdot \frac{(-2, 0)}{2}$$

$$= 0.25 \times 9 \times 10^3(-1, 0) = (2.25 \times 10^3, 0)\ [\mathrm{V/m}]$$

同様に，$\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_2 = (1-1, 2-(-1)) = (0, 3)$，また，$|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{0^2 + (3)^2} = 3$ [m] なので，

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_2|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_\mathrm{P} - \boldsymbol{r}_2|} = 9.0 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-6}}{3^2} \cdot \frac{(0, 3)}{3}$$

$$= 1 \times 10^3(0, 3) = (0, 3 \times 10^3)\ [\mathrm{V/m}]$$

(2) 点電荷 Q_1 および Q_2 が点 P に作る合成電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = (2.25 \times 10^3, 0) + (0, 3 \times 10^3) = (2.25 \times 10^3, 3 \times 10^3)$$

$$= (2.25 \times 10^3, 3 \times 10^3)\ [\mathrm{V/m}]$$

(3) 点 P に電荷量 $q = 2$ [μC] の点電荷を置いた．この点電荷に働く力のベクトル $\boldsymbol{F}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = 2 \times 10^{-6} \times (2.25 \times 10^3, 3 \times 10^3) = (4.5 \times 10^{-3}, 6 \times 10^{-3})\ [\mathrm{N}]$$