

受験番号					氏名				志望学科
				—					

I $x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2$ を因数分解せよ。(10 点)

【解答例】

$$\begin{aligned}
 x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 &= x^2 + (-y - 1)x - 2y^2 - 4y - 2 \\
 &= x^2 - (y + 1)x - 2(y^2 + 2y + 1) \\
 &= x^2 - (y + 1)x - 2(y + 1)^2 \\
 &= (x + y + 1)\{x - 2(y + 1)\} \\
 &= (x + y + 1)(x - 2y - 2)
 \end{aligned}$$

(答) $(x + y + 1)(x - 2y - 2)$

II 当たりくじが 4 本入っている 12 本のくじから 3 本のくじを同時に引くとき、少なくとも 1 本は当たる確率を求めよ。(10 点)

【解答例】

引いた 3 本のくじが全て当たらない確率は

$$\frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

である。

少なくとも 1 本は当たる，という事象は，3 本のくじが全て当たらない，という事象の余事象である。

ゆえに求める確率は

$$1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

である。

(答) $\frac{41}{55}$

III $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき，方程式 $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ を解け。(10 点)

【解答例】

2 倍角の公式から

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

である。

したがって $0^\circ \leq 2x \leq 360^\circ$ において

$$\frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{4}, \text{ 整理して } \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

を解けば良い。よって

$$2x = 30^\circ \text{ または } 150^\circ, \text{ ゆえに } x = 15^\circ \text{ または } 75^\circ$$

である。

(答) $x = 15^\circ$ または 75°

IV $a_1 = 5, a_{n+1} = 2a_n - 2 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の問に答えよ。(30 点)

問 1 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

【解答例】

$a_{n+1} = 2a_n - 2$ は $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$ のように変形できる。

ここで $b_n = a_n - 2$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = a_1 - 2 = 3, b_{n+1} = 2b_n$ を満たし、初項 3、公比 2 の等比数列であることがわかる。よって $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ である。

ゆえに数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は $a_n = b_n + 2 = 3 \cdot 2^{n-1} + 2$ である。

(答) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2$

問 2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

【解答例】

等比数列の和の公式と $\sum_{k=1}^n 1 = n$ であることを用いて、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 2^{k-1} + 2) = 3 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} + 2n = 3(2^n - 1) + 2n = 3 \cdot 2^n + 2n - 3 \end{aligned}$$

(答) $S_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 3$

問 3 $a_n > 5000$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

【解答例】

問 1 から、 $3 \cdot 2^{n-1} + 2 > 5000$ を満たす最小の自然数 n を求めれば良い。

この不等式は

$$3 \cdot 2^{n-1} > 4998$$

$$2^{n-1} > 1666$$

となる。ここで $2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ であるから、

不等式を満たす最小の n は $n - 1 = 11$ を満たし、 $n = 12$ である。

(答) $n = 12$

V 方程式 $\log_3 |x+3| - \log_3 |x-1| = 2$ を解け。(10 点)

【解答例】

与えられた方程式を変形する。

$$\log_3 \left| \frac{x+3}{x-1} \right| = 2 \iff \left| \frac{x+3}{x-1} \right| = 3^2 \iff \frac{x+3}{x-1} = \pm 9 \iff x+3 = \pm 9(x-1)$$

よって

$$(i) \ x+3 = 9x-9 \text{ を解いて } x = \frac{3}{2}$$

$$(ii) \ x+3 = -9x+9 \text{ を解いて } x = \frac{3}{5}$$

ゆえに求める解は $x = \frac{3}{2}, \frac{3}{5}$ である。

(答) $x = \frac{3}{2}, \frac{3}{5}$

VI 2 次関数 $y = x^2 - 6x + 4$ について、次の問に答えよ。(30 点)

問 1 この 2 次関数のグラフをかけ。

【解答例】

与えられた 2 次関数の方程式は

$$y = x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5$$

のように変形できるので、グラフの頂点の座標は $(3, -5)$ である。

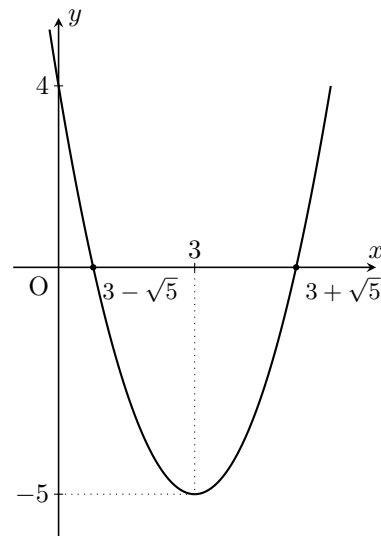
次に $x^2 - 6x + 4 = 0$ を解くと

$$x = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

であるから、グラフと x 軸との交点は $(3 \pm \sqrt{5}, 0)$ である。

また、グラフと y 軸との交点は $(0, 4)$ である。

以上のことに注意してグラフをかくと右のようになる。



問 2 この 2 次関数のグラフの接線のうち、傾きが -2 であるものを求めよ。

【解答例】

まず、 $y' = 2x - 6$ であることから、 $2x - 6 = -2$ を解くと $x = 2$ である。

次に、 $x = 2$ のときの 2 次関数の値は $y = 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = -4$ である。

よって求める接線は、 $(2, -4)$ を通り、傾き -2 の直線である。

ゆえにその方程式は

$$y = -2(x - 2) - 4, \text{ 整理して } y = -2x$$

である。

$$(\text{答}) y = -2x$$

問 3 この 2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【解答例】

2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と y 軸で

囲まれた部分は、右の図の斜線部分である。

よって求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x^2 - 6x + 4 - (-2x)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 8 + 8 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{8}{3}$$

