２０２４年度　外国人留学生入試　数学　【理工学部】

受　験　番　号									氏　　名	志　望　学　科
				−						学科

I　$x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 5y + 12$ を因数分解せよ。(10 点)

【解答例】

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 5y + 12 &= x^2 + (-y+7)x - 2y^2 - 5y + 12 \\ &= x^2 + (-y+7)x - (2y^2 + 5y - 12) \\ &= x^2 + (-y+7)x - (2y-3)(y+4) \\ &= \{x - (2y-3)\}(x+y+4) \\ &= (x-2y+3)(x+y+4) \end{aligned}$$

（答）$(x-2y+3)(x+y+4)$

II　男子 5 人，女子 4 人の合計 9 人の中から 3 人を選ぶとき，その中に少なくとも 1 人の女子を含むような選び方は何通りあるか求めよ。(10 点)

【解答例】

9 人の中から 3 人を選ぶ選び方は,

$${}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84 \text{（通り）}$$

である。その中で，女子を 1 人も含まないような選び方は，男子 5 人の中から 3 人を選ぶ選び方であるから,

$${}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10 \text{（通り）}$$

である。よって，少なくとも 1 人の女子を含むような選び方は,

$$84 - 10 = 74 \text{（通り）}$$

である。

（答）74（通り）

III　$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき，方程式 $\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。(10 点)

【解答例】

2 倍角の公式から

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x)$$

である。

したがって $0^\circ \leqq 2x \leqq 360^\circ$ において

$$-\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 整理して } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を解けば良い。よって

$$2x = 150^\circ \text{ または } 210^\circ, \text{ ゆえに } x = 75^\circ \text{ または } 105^\circ$$

である。

（答）$x = 75^\circ$ または 105°

Ⅳ　$a_1=2,\ a_{n+1}=4a_n+3\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問に答えよ。(30 点)

問 1　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

【解答例】

$a_{n+1}=4a_n+3$ は $a_{n+1}+1=4\,(a_n+1)$ のように変形できる。
ここで $b_n=a_n+1$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は $b_1=a_1+1=3,\ b_{n+1}=4b_n$ を満たし，
初項 3，公比 4 の等比数列であることがわかる。よって $b_n=3\cdot 4^{n-1}$ である。
ゆえに数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は $a_n=b_n-1=3\cdot 4^{n-1}-1$ である。

（答）$a_n=3\cdot 4^{n-1}-1$

問 2　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

【解答例】

等比数列の和の公式と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$ であることを用いて，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot 4^{k-1}-1)=3\sum_{k=1}^{n}4^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}1\\&=3\cdot\frac{1-4^n}{1-4}-n=-(1-4^n)-n=4^n-n-1\end{aligned}$$

（答）$S_n=4^n-n-1$

問 3　$a_n\leqq 5000$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。

【解答例】

問 1 から，$3\cdot 4^{n-1}-1\leqq 5000$ を満たす最大の自然数 n を求めれば良い。
この不等式は

$$\begin{aligned}3\cdot 4^{n-1}&\leqq 5001\\2^{2n-2}&\leqq 1667\end{aligned}$$

となる。ここで $2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048$ であるから，
不等式を満たす最大の n は $2n-2=10$ を満たし，$n=6$ である。

（答）$n=6$

Ⅴ　方程式 $\log_2|x+5|+\log_2|x-1|=3$ を解け。(10 点)

【解答例】

与えられた方程式を変形する。

$$\begin{aligned}\log_2|x+5|+\log_2|x-1|=3&\Longleftrightarrow\log_2|(x+5)(x-1)|=3\\&\Longleftrightarrow|(x+5)(x-1)|=2^3\\&\Longleftrightarrow(x+5)(x-1)=\pm 8\end{aligned}$$

よって

(i) $(x+5)(x-1)=8$,
$x^2+4x-13=0$ を解いて $x=-2\pm\sqrt{4-(-13)}=-2\pm\sqrt{17}$

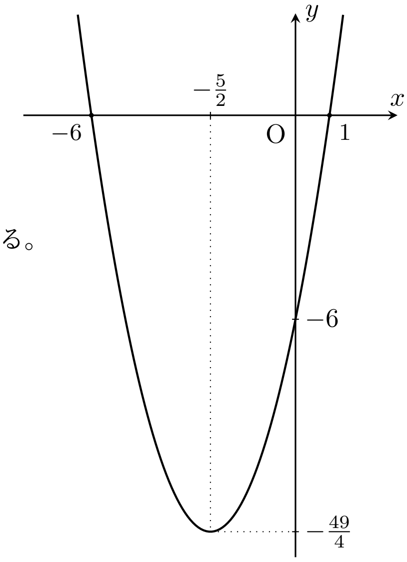
(ii) $(x+5)(x-1)=-8$,
$x^2+4x+3=0$,
$(x+1)(x+3)=0$ を解いて $x=-1,\ -3$

ゆえに求める解は $x=-2\pm\sqrt{17},\ -1,\ -3$ である。

（答）$x=-2\pm\sqrt{17},\ -1,\ -3$

$\boxed{\text{VI}}$　2 次関数 $y = x^2 + 5x - 6$ について，次の問に答えよ。(30 点)

問 1　この 2 次関数のグラフをかけ。



【解答例】

与えられた 2 次関数の方程式は

$$y = x^2 + 5x - 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

のように変形できるので，グラフの頂点の座標は $\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{49}{4}\right)$ である。

次に $x^2 + 5x - 6 = 0$ を解く。

$$x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$$

であるから，グラフと x 軸との交点は $(-6,\ 0)$, $(1,\ 0)$ である。

また，グラフと y 軸との交点は $(0,\ -6)$ である。

以上のことに注意してグラフをかくと右のようになる。

問 2　この 2 次関数のグラフにおいて，傾きが 1 である接線の方程式を求めよ。

【解答例】

まず，$y' = 2x + 5$ であることから，$2x + 5 = 1$ を解くと $x = -2$ である。

次に，$x = -2$ のときの 2 次関数の値は $y = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 6 = -12$ である。

よって求める接線は，$(-2,\ -12)$ を通り，傾き 1 の直線である。

ゆえにその方程式は

$$y = \{x - (-2)\} - 12,\ \text{整理して}\ \ y = x - 10$$

である。

（答）$y = x - 10$

問 3　この 2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【解答例】

2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と x 軸で囲まれた部分は，右の図の斜線部分である。

求める面積を S とし，斜線部分を直線 $x = 1$ で分けて考える。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \{x^2 + 5x - 6 - (x - 10)\}dx + \frac{9 \cdot 9}{2} \\ &= \int_{-2}^{1} (x^2 + 4x + 4)dx + \frac{81}{2} \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} + \frac{81}{2} \\ &= \frac{1}{3} + 2 + 4 - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 8\right) + \frac{81}{2} \\ &= \frac{99}{2} \end{aligned}$$

である。

（答）$\frac{99}{2}$