

受験番号									氏名	志望学科
				—						学科

I $x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 5y + 12$ を因数分解せよ。(10 点)

【解答例】

$$\begin{aligned}
 x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 5y + 12 &= x^2 + (-y + 7)x - 2y^2 - 5y + 12 \\
 &= x^2 + (-y + 7)x - (2y^2 + 5y - 12) \\
 &= x^2 + (-y + 7)x - (2y - 3)(y + 4) \\
 &= \{x - (2y - 3)\}(x + y + 4) \\
 &= (x - 2y + 3)(x + y + 4)
 \end{aligned}$$

(答) $(x - 2y + 3)(x + y + 4)$

II 男子 5 人, 女子 4 人の合計 9 人の中から 3 人を選ぶとき, その中に少なくとも 1 人の女子を含むような選び方は何通りあるか求めよ。(10 点)

【解答例】

9 人の中から 3 人を選ぶ選び方は,

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

である。その中で, 女子を 1 人も含まないような選び方は, 男子 5 人の中から 3 人を選ぶ選び方であるから,

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ (通り)}$$

である。よって, 少なくとも 1 人の女子を含むような選び方は,

$$84 - 10 = 74 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 74 (通り)

III $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき, 方程式 $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。(10 点)

【解答例】

2 倍角の公式から

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x)$$

である。

したがって $0^\circ \leq 2x \leq 360^\circ$ において

$$-\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 整理して } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を解けば良い。よって

$$2x = 150^\circ \text{ または } 210^\circ, \text{ ゆえに } x = 75^\circ \text{ または } 105^\circ$$

である。

(答) $x = 75^\circ$ または 105°

IV $a_1 = 2, a_{n+1} = 4a_n + 3 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の問に答えよ。(30 点)

問 1 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n の式で表せ。

【解答例】

$a_{n+1} = 4a_n + 3$ は $a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$ のように変形できる。

ここで $b_n = a_n + 1$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = a_1 + 1 = 3, b_{n+1} = 4b_n$ を満たし、初項 3、公比 4 の等比数列であることがわかる。よって $b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ である。

ゆえに数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は $a_n = b_n - 1 = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$ である。

(答) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$

問 2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

【解答例】

等比数列の和の公式と $\sum_{k=1}^n 1 = n$ であることを用いて、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 4^{k-1} - 1) = 3 \sum_{k=1}^n 4^{k-1} - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 3 \cdot \frac{1 - 4^n}{1 - 4} - n = -(1 - 4^n) - n = 4^n - n - 1 \end{aligned}$$

(答) $S_n = 4^n - n - 1$

問 3 $a_n \leq 5000$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。

【解答例】

問 1 から、 $3 \cdot 4^{n-1} - 1 \leq 5000$ を満たす最大の自然数 n を求めれば良い。

この不等式は

$$3 \cdot 4^{n-1} \leq 5001$$

$$2^{2n-2} \leq 1667$$

となる。ここで $2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ であるから、

不等式を満たす最大の n は $2n - 2 = 10$ を満たし、 $n = 6$ である。

(答) $n = 6$

V 方程式 $\log_2 |x + 5| + \log_2 |x - 1| = 3$ を解け。(10 点)

【解答例】

与えられた方程式を変形する。

$$\log_2 |x + 5| + \log_2 |x - 1| = 3 \iff \log_2 |(x + 5)(x - 1)| = 3$$

$$\iff |(x + 5)(x - 1)| = 2^3$$

$$\iff (x + 5)(x - 1) = \pm 8$$

よって

$$(i) (x + 5)(x - 1) = 8,$$

$$x^2 + 4x - 13 = 0 \text{ を解いて } x = -2 \pm \sqrt{4 - (-13)} = -2 \pm \sqrt{17}$$

$$(ii) (x + 5)(x - 1) = -8,$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \text{ を解いて } x = -1, -3$$

ゆえに求める解は $x = -2 \pm \sqrt{17}, -1, -3$ である。

(答) $x = -2 \pm \sqrt{17}, -1, -3$

VI 2 次関数 $y = x^2 + 5x - 6$ について、次の問に答えよ。(30 点)

問 1 この 2 次関数のグラフをかけ。

【解答例】

与えられた 2 次関数の方程式は

$$y = x^2 + 5x - 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

のように変形できるので、グラフの頂点の座標は $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$ である。

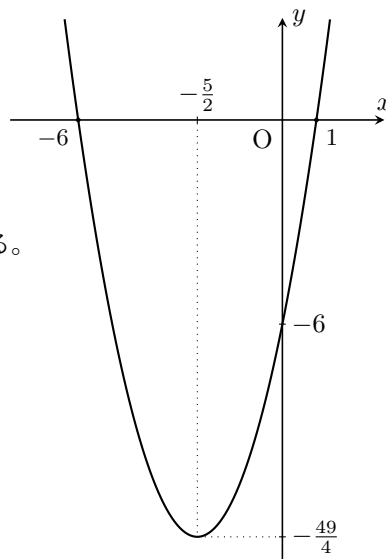
次に $x^2 + 5x - 6 = 0$ を解く。

$$x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$$

であるから、グラフと x 軸との交点は $(-6, 0)$, $(1, 0)$ である。

また、グラフと y 軸との交点は $(0, -6)$ である。

以上のことに注意してグラフをかくと右のようになる。



問 2 この 2 次関数のグラフにおいて、傾きが 1 である接線の方程式を求めよ。

【解答例】

まず、 $y' = 2x + 5$ であることから、 $2x + 5 = 1$ を解くと $x = -2$ である。

次に、 $x = -2$ のときの 2 次関数の値は $y = (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 6 = -12$ である。

よって求める接線は、 $(-2, -12)$ を通り、傾き 1 の直線である。

ゆえにその方程式は

$$y = \{x - (-2)\} - 12, \text{ 整理して } y = x - 10$$

である。

(答) $y = x - 10$

問 3 この 2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【解答例】

2 次関数のグラフと問 2 で求めた接線と x 軸で

囲まれた部分は、右の図の斜線部分である。

求める面積を S とし、斜線部分を直線 $x = 1$ で分けて考える。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{x^2 + 5x - 6 - (x - 10)\} dx + \frac{9 \cdot 9}{2} \\ &= \int_{-2}^1 (x^2 + 4x + 4) dx + \frac{81}{2} \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^1 + \frac{81}{2} \\ &= \frac{1}{3} + 2 + 4 - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 8 \right) + \frac{81}{2} \\ &= \frac{99}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{99}{2}$

