

2024年度 編入学試験 数学【理工学部】

| 受験番号 |  |  |  |   |  |  |  | 氏名 | 志望学科 |
|------|--|--|--|---|--|--|--|----|------|
|      |  |  |  | — |  |  |  |    |      |

**I** 以下の各問に答えよ。(20点)

問1. 以下の式を因数分解せよ。(答えのみでよい)

$$(1) x^2 + 3x - 18$$

$$(2) 6x^2 - 11xy + 4y^2$$

問2.  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 以下の方程式を解け。

$$(1) \sqrt{2} \cos \theta - 1 = 0$$

$$(2) \sin 2\theta + \sin \theta = 0$$

問3. 以下の関数の導関数を求めよ。

$$(1) f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4 \quad (\text{答えのみでよい})$$

$$(2) f(x) = x \cos 2x$$

$$(3) f(x) = (\log x)^2$$

問4. 曲線  $y = e^{-x}$  の点  $(0, 1)$  における接線の方程式を求めよ。

**問1. (解答例)** 因数分解する。

$$(1) x^2 + 3x - 18 = (x - 3)(x + 6)$$

$$(2) 6x^2 - 11xy + 4y^2 = (2x - y)(3x - 4y)$$

**問2. (解答例)**  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で方程式を解く。

$$(1) \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$$

$$(2) \text{ 加法定理 } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ より}$$

$$\sin 2\theta + \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta = \sin \theta (2 \cos \theta + 1)$$

が成り立つ。また  $\sin \theta (2 \cos \theta + 1) = 0$  から  $\sin \theta = 0$  と  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$  が得られる。それぞれの方程式の解は  $\theta = 0, \pi$  と  $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  である。したがって (2) の解は  $\theta = 0, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  である。

**問3. (解答例)**

$$(1) f'(x) = 6x^2 - 10x$$

$$(2) f'(x) = 1 \cdot \cos 2x + x(\cos 2x)' = \cos 2x - 2x \sin 2x$$

$$(3) f'(x) = 2 \log x \cdot (\log x)' = \frac{2}{x} \log x$$

**問4. (解答例)**  $f(x) = e^{-x}$  とすると  $f(0) = 1$  である。また  $f'(x) = -e^{-x}$  なので  $f'(0) = -1$  である。したがって, 接線の方程式は

$$y = -(x - 0) + 1 \quad \text{から} \quad y = -x + 1.$$

II 以下の積分を計算せよ。(12 点)

$$(1) \int_1^2 (3x^2 + 4x - 5)dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (4) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

II (解答例) 積分を計算する。((4) は  $t = x^2$  で変数変換してから積分する。)

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 (3x^2 + 4x - 5)dx &= [x^3 + 2x^2 - 5x]_1^2 = 8 + 8 - 10 - (1 + 2 - 5) = 8. \\ (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \\ (3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{c \rightarrow +0} \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow +0} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{c^2} \right) = \frac{3}{2}. \\ (4) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k x e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{k^2} \frac{1}{2} e^{-t} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-t} \right]_0^{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-k^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

III 2 変数関数  $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y - 2$  について、以下の間に答えよ。(18 点)

問 1. 以下の偏導関数を求めよ。(答えのみでよい)

$$(1) f_x(x, y) \quad (2) f_y(x, y) \quad (3) f_{xx}(x, y) \quad (4) f_{yy}(x, y) \quad (5) f_{xy}(x, y)$$

問 2.  $f_x(x, y) = 0$  かつ  $f_y(x, y) = 0$  であるとき、実数  $(x, y)$  の組を全て求めよ。

問 3.  $f(x, y)$  の極値を求めよ。

問 1. (解答例) それぞれの偏導関数を求める。

$$(1) f_x(x, y) = 3x^2 - 3 \quad (2) f_y(x, y) = -3y^2 + 12$$

$$(3) f_{xx}(x, y) = 6x \quad (4) f_{yy}(x, y) = -6y \quad (5) f_{xy}(x, y) = 0$$

問 2. (解答例)  $f_x(x, y) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$  が成り立つので  $x = 1, -1$  である。 $f_y(x, y) = -3y^2 + 12 = -3(y^2 - 4) = -3(y+2)(y-2) = 0$  が成り立つので  $y = 2, -2$  である。したがって、求める実数の組み合わせは  $(x, y) = (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$

問 3. (解答例) 極値を取る必要条件是  $f_x = f_y = 0$  である。問 2. で求めた  $(x, y)$  を ヘッセ行列式

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = -36xy$$

に代入して極値の判定を行う。

- $(x, y) = (1, 2)$  のとき  $H(1, 2) = -72 < 0$  であるから極値を取らない。
- $(x, y) = (-1, -2)$  のとき  $H(-1, -2) = -72 < 0$  であるから極値を取らない。
- $(x, y) = (-1, 2)$  のとき  $H(-1, 2) = 72 > 0$  で  $f_{xx} = -6 < 0$  より、極大値  $f(-1, 2) = -1 - 8 + 3 + 24 - 2 = 16$  を取る。
- $(x, y) = (1, -2)$  のとき  $H(1, -2) = 72 > 0$  で  $f_{xx} = 6 > 0$  より、極小値  $f(1, -2) = 1 + 8 - 3 - 24 - 2 = -20$  を取る。

IV  $2 \times 2$  行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  に対して以下の問に答えよ。(18 点)

問 1. 行列の積  $A^2$  を計算せよ。(答えのみでよい)

問 2. 行列の積  $A^5$  および  $A^6$  を計算せよ。

問 3.  $AX = XA$  を満たす  $2 \times 2$  行列  $X$  をすべて求めよ。

問 1. (解答例)  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$  ( $2 \times 2$  単位行列)

問 2. (解答例) 問 1 の結果を使って

$$A^3 = A^2 A = EA = A, \quad A^4 = A^3 A = A^2 = E$$

したがって

$$A^5 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また

$$A^6 = A^5 A = A^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

問 3. (解答例)  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とおく。

$$AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & a-b \\ c & c-d \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{cases} a+c = a \\ b+d = a-b \\ -c = c \\ -d = c-d \end{cases}$$

第 3 式から  $c = 0$  となり  $b+d = a-b$  を得る。 $s, t$  を任意定数として

$$a = s, \quad d = t$$

とおくと  $b = \frac{s-t}{2}$  を得る。したがって

$$X = \begin{pmatrix} s & \frac{s-t}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

V 以下の行列式の値を求めよ。(15 点)

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(解答例) (1)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 2 \times 1 = -4$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times 0 \times 1 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 1 \times 2 - 3 \times 0 \times 3 - 1 \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times 2 \\ &= 0 + 6 + 6 - 0 - 2 - 2 = 8 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 6 + 30 = 19 \end{aligned}$$

VI  $3 \times 3$  行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  に対して以下の問に答えよ。(17 点)

問 1.  $A$  の固有値が 0, 1, 6 であることを示せ。

問 2.  $A$  の固有値が 0 の場合に対応する固有ベクトルを計算せよ。

問 3.  $A^2$  の固有値を求めよ。

問 1. (解答例) 固有方程式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

である。行列式を計算すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= (3 - \lambda)^2(1 - \lambda) - 9(1 - \lambda) \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 6) \end{aligned}$$

を得る。したがって、この行列式がゼロとなる条件から固有値は  $\lambda = 0, 1, 6$  であることがわかる。

問 2. (解答例) 求める固有ベクトル  $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  は連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解である。拡大係数行列を以下のように階段行列に基本変形して

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。これより、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。したがって

$$3x + 3z = 0, \quad y = 0$$

である。 $t$ を任意定数として $z = t$ とおくと $x = -t$ であり、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はゼロでない任意定数})$$

**問 3. (解答例)**  $A$  の固有値を  $\lambda$ , 対応する固有ベクトルを  $\boldsymbol{v}$  とすると,

$$A^2 \boldsymbol{v} = A(A\boldsymbol{v}) = A(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda A\boldsymbol{v} = \lambda^2 \boldsymbol{v}$$

したがって  $\lambda^2$  は  $A^2$  の固有値である。 $\lambda = 0, 1, 6$  より  $0, 1, 36$  は  $A^2$  の固有値であり、 $3 \times 3$  行列であるからこれが全ての固有値である。別解として、フロベニウスの定理から  $A^2$  の固有値は  $0, 1, 36$  であるとしても良い。